Anaylsis II

Mauro Bringolf

15.10.2018

1 Nachbesprechung Serie 3

1.1 Kleine Dinge

- Für $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ist $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = \|x\|^2 = \|x\|_2^2 = |x|^2$
- Vermeidet Punkte $a_1 + \cdots + a_n$ und verwende stattdessen zum Beispiel das Summenzeichen $\sum_{i=1}^n a_i$.
- Rechenregeln für endliche Summen:
  - $$\sum_{i=1}^n a = n \cdot a$$
  - $$\sum_{i=1}^n b a_i = b \cdot \sum_{i=1}^n a_i$$
  - $$\sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i = \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)$$
  - $$\sum_{i=1}^n a_{n-i} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i$$
  - $$\sum_{i=1}^n a_{i+m} = \sum_{i=1+m}^{n+m} a_i$$
- In Beweisen alle Variablen mit Typ definieren **bevor** man sie verwendet.

- Beweise sollten einem einfachen "type check" standhalten, i.e. bei allen Gleichungen steht links und rechts derselbe Typ und alle Operatoren werden nur auf erlaubte Typen angewandt.
- Gleichungen und Funktionen sind zwei verschiedene Dinge. $y = x^2$ ist eine Gleichung, aber $f : X \to Y, x \mapsto x^2$ ist eine Funktion. Diese müssen beim Aufschreiben von Beweisen klar getrennt werden.

1.2 Aufgabe III

Wir beweisen die beiden Richtungen separat. Für $\Rightarrow$ betrachten ein $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und die Funktion

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto f(tx_0) \tag{1}$$

Diese Funktion wollen wir nach t ableiten. Das geht nicht direkt, da es sich um eine Komposition von zwei Funktionen handelt. Die äussere Funktion ist f und die innere nennen wir h:

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, t \mapsto tx_0 \tag{2}$$

Die Komposition $g(t) = f(h(t))$ geht über R^n, das heisst wir müssen die mehrdimensionale Kettenregel anwenden:

$$J_g(t) = J_f(h(t)) \cdot J_h(t) \tag{3}$$

Da f ein Skalarfeld ist können wir die Ableitung auch als transponierten Gradienten schreiben, also $df(h(t)) = \nabla f(h(t))^\top$. Dies ist ein Zeilenvektor mit n Einträgen. Die Jacobi-Matrix von h ist genau x_0. Somit haben wir:

$$J_g(t) = \nabla f(h(t))^\top \cdot x_0 \tag{4}$$

Andereseits haben wir von der vorausgesetzten *Gleichung* eine alternative Darstellung von g, nämlich $g(t) = t^\lambda f(x_0)$. Das heisst die Ableitung von g ist auch gegeben durch $\lambda t^{\lambda-1} f(x_0)$. Somit erhalten wir für jedes $t \in \mathbb{R}^\ltimes$ die folgende *Gleichung*:

$$\lambda t^{\lambda-1} f(x_0) = \nabla f(h(t))^\top \cdot x_0 \tag{5}$$

Für $t = 1$ erhalten wir die gewünschte Identität an der Stelle x_0. Diese war beliebig, also sind wir fertig mit dieser Richtung. Für die andere Richtung, sei wieder $x_0 \in \mathbb{R}^n$ fix und betrachte die folgende Funktion:

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto t^{-\lambda} f(tx_0) \tag{6}$$

Mit derselben Methode wie vorher (und Produktregel) leiten wir nach t ab:

$$dg(t) = -\lambda t^{\lambda-1} f(tx_0) + t^{-\lambda} \nabla f(h(t))^\top \cdot x_0 \tag{7}$$

Nun setzen wir die Annahme an f ein und erhalten:

$$dg(t) = -\lambda t^{\lambda-1} f(tx_0) + t^{-\lambda} \lambda f(tx_0) = 0 \tag{8}$$

Somit ist g eine konstante Funktion, insbesondere ist $f(x_0) = g(1) = g(t) = t^{-\lambda} f(tx_0)$ für jedes t. Das bedeutet, dass f homogen mit Grad λ ist.