Anaylsis II

Mauro Bringolf

22.10.2018

1 Nachbesprechung Serie 4

1.1 Kleine Dinge

- Ein Vektor ungleich Null bedeutet dass mindestens eine seiner Komponenten ungleich Null, aber nicht zwingend alle.

  $$u \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \not\Rightarrow (u_x \neq 0 \wedge u_y \neq 0)$$

  Insbesondere kann bei einer Richtungsableitung in Richtung u eine Komponente von u Null sein.

1.2 Richtungsableitungen und Jacobi-Matrix

Betrachten wir $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar, ein $a \in \mathbb{R}^n$ und einen Vektor $v \in S^{n-1}$. Die Richtungsableitung von f an der Stelle a in Richtung v ist definiert als:

$$\frac{d}{dt} f(a + tu)|_0$$

Wenn alle Grössen konkret gegeben sind können wir dies mit Analysis I ausrechnen. Für den allgemeinen Fall können wir die Kettenregel anwenden. Die innere Funktion ist $t \mapsto a + tu$, deren Ableitung der Spaltenvektor u ist (Vergleiche Serie 3, Aufgabe III). Per Kettenregel erhalten wir also:

$$\frac{d}{dt} f(a + tu)|_0 = J_f(a + tu) \cdot u|_0 = J_f(a) \cdot u \tag{1}$$

So kommt die Beziehung zwischen Jacobi-Matrix und Richtungsableitung zu Stande (Vergleiche Proposition 3.4.15 im Skript).

1.3 Richtungsableitungen und Einheitsvektoren

Eine Richtungsableitung ist normiert in dem Sinne, dass Sie immer in Richtung von Vektoren der Länge 1 berechnet wird. Ist der gegebene Richtungsvektor u kein Einheitsvektor, so verwendet man den entsprechenden Einheitsvektor $\frac{u}{\|u\|}$. Man hat hier die Wahl: Einerseits kann man in die Formel $f(a+tu)$ direkt den normierten Vektor einsetzen *oder* man rechnet mit dem nicht normierten u und teilt das Resultat durch $\|u\|$. Das sieht man leicht mit der Charakterisierung der Richtungsableitung über die Jacobi-Matrix. Angenommen wir haben einen beliebigen Vektor u und setzen $v := \frac{u}{\|u\|}$. Dann:

$$D_v f(a) = J_f(a) \cdot v = \frac{1}{\|u\|} J_f(a) \cdot u = \frac{1}{\|u\|} D_u f(a) \tag{2}$$

Allgemeiner: Von der Formel über Jacobi-Matrix folgt direkt dass Richtungableitung ein lineare Operation ist.

1.4 Aufgabe III

Nachbesprechung mit Musterlösung

1.5 Aufgabe IV

Wir wollen eine neue Funktion definieren, die die Variablentransformation realisiert. Dazu invertieren wir zuerst das Mapping von ξ und η und erhalten $x = \frac{(\xi+\eta)}{2}$ und $t = \frac{\eta-\xi}{2c}$. Nun definieren die neue Funktion g wie folgt:

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (\xi, \eta) \mapsto f(\frac{(\xi+\eta)}{2}, \frac{\eta-\xi}{2c}) \tag{3}$$

Nun berechnen wir die rechte Seite der gewünschten Gleichung mit der Kettenregel. Im ersten Schritt leiten wir also nach η ab:

$$\frac{\partial}{\partial \eta} g(\xi, \eta) = \nabla f(x,t)^\top \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2c} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \frac{\partial f(x,t)}{\partial x} + \frac{1}{2c} \frac{\partial f(x,t)}{\partial t} \tag{4}$$

Nun leiten wir das Resultat nach ξ ab:

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi \eta} g(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,t) & \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} f(x,t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2c} \end{bmatrix} + \frac{1}{2c} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} f(x,t) & \frac{\partial^2}{\partial t^2} f(x,t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2c} \end{bmatrix} \tag{5}$$

Die gemischten zweiten Ableitungen haben genau entgegengesetzte Vorzeichen, so dass nach Vereinfachen bleibt:

$$\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x,t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}f(x,t)\right) = -\frac{1}{4}\Box f \tag{6}$$