Anaylsis II

Mauro Bringolf

29.10.2018

1 Nachbesprechung Serie 5

1.1 Kleine Dinge

- Gemischte Notationen für partielle Ableitungen können sehr verwirrend werden, verwende eine möglichst einheitliche Schreibweise, i.e. immer $\frac{\partial}{\partial x}$ oder ∂_x und so weiter.
- Bei Ausdrücken mit Differentialoperatoren muss man extrem auf die Klammerung aufpassen. Zum Beispiel ist $\partial_x(x\partial_x) \neq (\partial_x x)\partial_x$, nämlich für $h(x) = x^2$:

$$\partial_x(x\partial_x h) = \partial_x(x \cdot 2x) = 4x, \quad (\partial_x x)\partial_x h = 1 \cdot 2x = 2x \tag{1}$$

  Beide Operatoren sind können übrigens noch vereinfacht werden:

$$\partial_x(x\partial_x) \overset{Produktregel}{=} \partial_x + x \cdot \partial_x^2, \quad (\partial_x x)\partial_x = \partial_x \tag{2}$$

- In Aufgabe II.3 geht es um *die grösse Richtungsableitung (RA)* an einer bestimmten Stelle. Diese Frage macht nur für normierte RA Sinn, da Streckung eines Vektors immer auch die RA um denselben Faktor vergrössert (Linearität der RA, siehe Notizen 22.10.18 Abschnitt 1.3).
- Genau wie Stetigkeit bleibt Differenzierbarkeit unter Komposition von Funktionen erhalten (Kettenregel).
- Seien $v, w \in \mathbb{R}^2$ zwei feste Vektoren. Welche Eigenschaft ist notwendig, damit man einen beliebigen gegebenen Vektor $y \in \mathbb{R}^2$ als $\alpha v + \beta w$ schreiben kann?

2 Vorbesprechung Serie 6

2.1 Aufgabe I

Die allgemeine Definition des Taylorpolynoms ist mühsam hinzuschreiben (*Skript Def 3.7.1*), es gibt aber zwei einfache Spezialfälle. In der ersten Ordnung kommen nur erste partielle Ableitungen vor:

$$T_1 f(x, x_0) = f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0) \tag{3}$$

In der zweiten Ordnung kommen erste und zweite partielle Ableitungen vor, die wir mit der Hesse-Matrix ausdrücken können:

$$T_2 f(x, x_0) = f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^\top Hess_f(x_0)(x - x_0) \tag{4}$$

2.2 Aufgabe II

Extremalwerte von Skalarfeldern findet man folgendermassen:

1. Finde alle kritischen Punkte, das heisst löse $\nabla f(x) = 0$.
2. Für jeden kritischen Punkt, berechne die Hesse-Matrix H.
3. Falls $det(H) \neq 0$, berechne deren Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$. Dann gilt folgendes:
   - Falls alle λ_i positiv sind, dann ist x_0 ein Minimum.
   - Falls alle λ_i negativ sind, dann ist x_0 ein Maximum.
   - Falls es positive und negative λ_i gibt, dann ist x_0 ein Sattelpunkt.

Die Ausnahmefälle sind also kritische Punkte x_0 mit $det(Hess_f(x_0)) = 0$. In diesen Fällen kann man Maximalität oder Minimalität durch eine direkte Ungleichung zeigen. Für einen Sattelpunkt ist es genug, zwei Wege zu x_0 anzugeben für die die Funktionswerte einmal grösser und einmal kleiner sind.

3 Rechnen mit trigonometrischen Funktionen

Es gibt eine Million nützlicher Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen. Die Folgende Liste zeigt vor allem solche, die ich selber wiederholt angewandt habe.

3.1 Definitionen

Es gibt viele äquivalente Definitionen um Sinus und Kosinus auf ganz $\mathbb{R}$ zu definieren. Eine nicht allzu formale, dafür sehr anschauliche ist als Koordinaten im Einheitskreis: Für irgendein $\phi \in \mathbb{R}$ startet man beim Punkt $(1, 0)$ und läuft den Winkel ϕ (im Bogenmass) auf dem Einheitkreis ab. Man landet auf einem eindeutigen Punkt (x, y) und man definiert $\cos(\phi) := x$ und $\sin(\phi) := y$. Ausgehend von dieser Definition sieht man viele gute Eigenschaften "direkt".

Darauf aufbauend definiert man:

- **Tangens:** $\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$
- **Kotangens:** $\cot(x) := \frac{1}{\tan(x)}$
- **Sekans:** $\sec(x) := \frac{1}{\cos(x)}$
- **Kosekans:** $\csc(x) := \frac{1}{\sin(x)}$

Beim Rechnen kann man diese oft einfach als "syntactic sugar" für Kombinationen von Sinus und Kosinus sehen.

3.2 Umkehrfunktionen

- **Arkussinus:** $\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
- **Arkuscosinus:** $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$
- **Arkustangens:** $\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

3.3 Funktionswerte

For all $k \in \mathbb{Z}$ we have

$$\begin{array}{lll}
\sin(0) = \sin(\pi) = 0 & \sin(\frac{\pi}{2}) = 1 & \sin(\frac{3\pi}{2}) = -1 \\
\cos(\frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{3\pi}{2}) = 0 & \cos(0) = 1 & \cos(\pi) = -1 \\
\cos(k\pi + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}} & \sin(k\pi + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}} &
\end{array}$$

3.4 Identitäten

Meiner Meinung nach die wichtigsten zum Rechnen sind gerade vs. ungerade, Summe der Quadrate, Periodizität und Phasenverschiebung:

$$\begin{array}{lll}
\sin(-x) = -\sin(x) & \cos(-x) = \cos(x) & \tan(-x) = -\tan(x) \\
\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1 & \sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x) & \cos(x + \frac{\pi}{2}) = \sin(-x) \\
\sin(x + k2\pi) = \sin(x) & \cos(x + k2\pi) = \cos(x) & \tan(x + k2\pi) = \tan(x)
\end{array}$$

Weitere Kategorien von Identitäten [1]:

- Additionstheoreme: $\sin(x+y) = \dots$
- Ausdrücke für Doppelwinkel und Halbwinkel: $\sin(2x) = \dots$, $\sin(\frac{x}{2}) = \dots$
- Summen und Produkte von Winkelfunktionen: $\sin(x)+\sin(y)$, $\sin(x)\cos(y)$

3.5 Ableitungen

$\frac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x)$ $\quad$ $\frac{d}{dx}\arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\frac{d}{dx}\cos(x) = -\sin(x)$ $\quad$ $\frac{d}{dx}\arccos(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\frac{d}{dx}\tan(x) = 1+\tan(x)^2 = \frac{1}{\cos(x)^2}$ $\quad$ $\frac{d}{dx}\arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$

3.6 Integrale

$\int\sin(x) = -\cos(x)$ $\quad$ $\int\arcsin(x) = \sqrt{1-x^2} + x\arcsin(x)$
$\int\cos(x) = \sin(x)$ $\quad$ $\int\arccos(x) = x\arccos(x) - \sqrt{1-x^2}$
$\int\tan(x) = -\log(\cos(x))$ $\quad$ $\int\arctan(x) = x\arctan(x) - \log\sqrt{1+x^2}$

3.7 Weierstrass Substitution

Für $x \in (-\pi, \pi)$ sei $t := \tan(\frac{x}{2})$. Dann gilt:

$$\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \tan(x) = \frac{2t}{1-t^2} \tag{5}$$

Dies ist insbesondere für Integrale nützlich, da rationale Funktionen immer durch Partialbruchzerlegung integriert werden können [2].

References

[1] https://de.wikipedia.org/wiki/Formelsammlung_Trigonometrie.

[2] https://de.wikipedia.org/wiki/Weierstraß-Substitution