Anaylsis II

Mauro Bringolf

8.10.2018

1 Nachbesprechung Serie 2

1.1 Aufgabe I.2

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos^2(\phi)r\sin(\phi)}{r^4\cos^4(\phi)+r^2\sin^2(\phi)} = \lim_{r\to 0} \frac{r\cos^2(\phi)\sin(\phi)}{r^2\cos^4(\phi)+\sin^2(\phi)} \tag{1}$$

Wenn wir gerade Kurven nach $(0,0)$ betrachten, dann ist ϕ konstant und dieser Grenzwert ist 0. Etwas einfacher sieht man es mit der Parametrisierung (x, mx) in kartesischen Koordinaten. Leider ist dass genau so ein Fall, wo diese geraden Linien nicht ausreichen, was man über die Linie $y = x^2$ nachrechnen kann.

1.2 Aufgabe III.3

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \max(x,y) \tag{2}$$

Betrachten wir eine beliebige Stelle $a = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ und eine beliebige Folge $a_n = (x_n, y_n) \to (a_x, a_y)$. Um die Definition von Stetigkeit zu erfüllen sollten wir jetzt $f(a_n) \to f(a)$ zeigen können.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir $x \geq y \Leftrightarrow f(x,y) = \max(x,y) = x$ an (Symmetrie). Weil a_n zu a konvergiert konvergieren beide Koordinaten einzeln, das heisst $x_n \to x$ und $y_n \to y$. Das heisst für jedes $\epsilon > 0$ können wir ein n_0 finden, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt:

$$|x_n - x| < \epsilon, \quad |y_n - y| < \epsilon \tag{3}$$

Zusammen mit der Annahme $x \geq y$ erhalten wir:

$$x_n \geq x - \epsilon \geq y - \epsilon \geq y_n - 2\epsilon \tag{4}$$

Daraus erhalten wir eine obere Schranke für das Maximum der beiden Folgen:

$$\max(x_n, y_n) \leq x_n + 2\epsilon \tag{5}$$

Insbesondere gilt also $|\max(x_n, y_n) - x_n| \leq 2\epsilon$. Jetzt verwenden wir dass x_n nahe bei x liegt:

$$\begin{aligned}
|\max(x_n, y_n) - x| &= |\max(x_n, y_n) - x_n + x_n - x| && (6)\\
&\leq |\max(x_n, y_n) - x_n| + |x_n - x| && (7)\\
&\leq 3\epsilon && (8)
\end{aligned}$$

Hier ist (7) die Dreiecksungleichung. Das heisst durch passende Wahl des n_0 können wir die Funktion beliebig nahe an den gewünschten Wert x drücken. Wir haben gezeigt dass $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$ und somit f stetig an der Stelle a ist.

1.3 Aufgabe III.3 Alternative

Wir können das Maximum umschreiben, so dass es direkt eine Komposition stetiger Funktionen wird:

$$\max(x, y) = \frac{x + y + |x - y|}{2} \tag{9}$$

1.4 Aufgabe III.4

Man sollte den Beweis von III.3 auf n Variablen übertragen können. Es genügt aber auch ein einfaches Induktionsargument:

$$\max(x_1, \ldots, x_n) = \max(\max(x_1, \ldots, x_{n-1}), x_n) \tag{10}$$

Somit ist f eine Komposition von zwei Maximumsfunktionen. Eine geht über $n - 1$ Variablen und die andere über zwei. Per Induktion sind diese stetig, wodurch auch ihre Komposition f stetig ist.

2 Vorbesprechung Serie 3

2.1 Aufgabe I

Definiere eine neue Funktion die nur von x_1 abhängt.

2.2 Aufgabe II

Verwende Aufgabe I.

2.3 Aufgabe III

- Beweise die beiden Richtungen der Äquivalenz separat.
- Für $\Rightarrow$ betrachte die Funktion $g(t,x) := f(tx)$.
- Für $\Leftarrow$ ist die Funktion $g(t,x) := t^{-\lambda} f(tx)$ nützlich.
- Das ist eine Übung im Anwenden der mehrdimensionalen Kettenregel. Gerade wenn man sie symbolisch anwendet (f, g, x anstatt konkrete Funktionen und Vektoren), dann sollte man immer checken dass mit den Dimensionen alles aufgeht.

2.4 Aufgabe IV

- Bei **1.** muss man weniger schreiben wenn man direkt mit allgemeinem n rechnet und am Ende $n = 2$ einsetzt.
- Bei **3.** ist die Wärmeleitungsgleichung $(\partial t - \Delta_x) f = 0$.
- Diese Aufgabe löst man durch direktes Ausrechnen der relevanten Grössen.

3 Beispiel einer PDE

Betrachte die folgende partielle Differentialgleichung:

$$\partial_t u(x,t) = k \partial_{x,x} u(x,t) \tag{11}$$

Wobei k ein Parameter ist. Wir wollen zeigen dass die Funktion $u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi k t}} e^{-\frac{x^2}{4kt}}$ diese PDE löst. Dazu berechnen wir direkt die beiden Ableitungen und somit beide Seiten der Gleichung. Diese sollten sich dann in einander Umformen lassen.