Anaylsis II

Mauro Bringolf

19.11.2018

1 Nachbesprechung Serie 8

- Wegintegrale sind immer **bestimmte Integrale** also nicht vergessen die richtigen Integrationsgrenzen für alle Wege einzusetzen.
- Wenn man einen Weg stückweise parametrisiert, dann kann man für jeden Abschnitt ein eigenes Parameterintervall wählen. Insbesondere müssen diese nicht zusammenhängend sein oder dürfen überlappen. Das ist erlaubt weil das Wegintegral unabhängig von der Parametrisierung ist.
- Die Richtung in welche man parametrisiert spielt im Allgemeinen eine Rolle, also immer nachchecken ob tatsächlich Anfangs- und Endpunkt so sind wie sie sollen.

1.1 Parametrisierungenen

Gerade Eine Gerade von (a, b) nach (c, d) hat (zum Beispiel) folgende Parametrisierung:

$$[0,1] \mapsto \begin{bmatrix} a + t(c-a) \\ b + t(d-b) \end{bmatrix} \tag{1}$$

Kreis Ein Kreis mit Mittelpunkt (x, y) und Radius r hat (zum Beispiel) folgende Parametrisierung:

$$[0,2\pi] \mapsto \begin{bmatrix} x + r\cos(t) \\ y + r\sin(t) \end{bmatrix} \tag{2}$$

Ellipse Eine Ellipse mit Mittelpunkt (x, y) und Radien a, b hat (zum Beispiel) folgende Parametrisierung:

$$[0,2\pi] \mapsto \begin{bmatrix} x + a\cos(t) \\ y + b\sin(t) \end{bmatrix} \tag{3}$$

2 Vorbesprechung Serie 9

2.1 Konservative Vektorfelder

Definition Ein Vektorfeld $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heisst **konservativ**, falls eine der folgenden äquivalenten Bedingungen gilt:

1. Es gibt ein Skalarfeld $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ so dass $v = \nabla f$. Die Funktion f heisst **Potenzial** von v und ist eindeutig bis auf additive Konstante.
2. Für jedes paar von Punkten $a, b \in \mathbb{R}^n$ hat jedes Wegintegral über v von a nach b denselben Wert.
3. Für jede geschlossene Kurve ist das Wegintegral über v gleich Null.

Einige dieser Zusammenhänge sind leicht ersichtlich. Der Beweis von 1. nach 2. ist in Serie 8 Aufgabe III schon vorgekommen:

$$\begin{aligned}
\int_\gamma v ds &= \int_a^b v(\gamma(t))\gamma'(t) && (4)\\
&= \int_a^b \nabla f(\gamma(t))\gamma'(t) && (5)\\
&= \int_a^b \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) dt && (6)\\
&= f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) && (7)
\end{aligned}$$

Die Äquivalenz von 2. und 3. sieht man indem man einen Kreis als zwei aneinandergehängte Kurven mit demselben Start und Ende ansieht. Die Hauptaussage ist also, dass von 2. oder 3. auch 1. impliziert (Skript Thm 4.1.10).