Anaylsis II

Mauro Bringolf

26.11.2018

1 Nachbesprechung Serie 9

1.1 Konservative Vektorfelder

Da der Definitionsbereich nicht eingeschränkt ist gehen wir von $\mathbb{R}^n$ aus. Dementsprechend können wir das Kriterium für konservative Vektorfelder durch partielle Ableitungen verwenden (Theorem 4.1.17 Skript).

1.1.1

$$\partial_x v_2(x,y) = \partial_x(x-y) = 1, \quad \partial_y v_1(x,y) = \partial_y(x-y) = -1 \tag{1}$$

Diese sind unterschiedlich, also ist v **nicht konservativ**.

1.1.2

$$\partial_x v_2(x,y) = \partial_x(x^3+2xy) = 3x^2+2y, \quad \partial_y v_1(x,y) = \partial_y(x^2-y) = -1 \tag{2}$$

Demzufolge ist v nicht konservativ, da sich diese zwei partiellen Ableitungen zum Beispiel an der Stelle $(0,0)$ unterscheiden.

1.1.3

$$\partial_x v_2(x,y) = \partial_x(x^2-y) = 2x \quad \partial_y v_1(x,y) = \partial_y(x^3+2xy) = 2x \tag{3}$$

Diese sind identisch, also ist v **konservativ**.

1.1.4

$$\partial_x v_2(x,y) = \partial_x(x^2y - y^5) = 2xy \quad \partial_y v_1(x,y) = \partial_y(x^3 - xy^2) = -2xy \tag{4}$$

Diese sind unterschiedlich, also ist v **nicht konservativ**.

1.2 Ein Gegenbeispiel

1.2.1

Wir berechnen dieselben partiellen Ableitungen wie vorhin:

$$\partial_x v_2(x,y) = \partial_x\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} \tag{5}$$

Durch ein Symmetrieargument oder direkte Rechnung findet man, dass die zweite identisch ist:

$$\partial_y v_1(x,y) = \partial_y\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} \tag{6}$$

1.2.2

Das Wegintegral um den Kreis berechnen wir direkt mit der Definition:

$$\begin{aligned}
\int_\gamma v ds &= \int_0^{2\pi} v(\gamma(t))\gamma'(t)dt && (7)\\
&= \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} \sin(t) \\ -\cos(t)dt \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix} dt && (8)\\
&= \int_0^{2\pi} 0dt && (9)\\
&= 0 && (10)
\end{aligned}$$

1.2.3

Aus den bisherigen Rechnungen lässt sich diese Frage weder mit "Ja" noch mit "Nein" beantworten. In 1.2.1 haben wir zwar die Bedingung an die partiellen Ableitungen nachgewiesen, allerdings ist das nur für sternförmige Definitionsbereiche anwendbar. Intuitiv ist klar, dass $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ nicht sternförmig ist. Etwas formaler liegt für jeden Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^2$ der Nullpunkt auf der Gerade durch x_0

und $-x_0$ (Spiegelung am Ursprung), das heisst diese Gerade ist nicht vollständig in der Menge enthalten,

Andererseits haben wir in 1.2.2 gesehen, dass das Wegintegral über eine bestimmte Schleife verschwindet. In einem konservativen Vektorfeld muss das aber für **alle Schleifen** geschehen!

Die einzige Art zu beweisen, dass ein Vektorfeld nicht konservativ ist wäre meiner Meinung nach ein echtes Gegenbeispiel, also eine Schleife deren Wegintegral nicht verschwindet. Um zu zeigen dass ein Vektorfeld konservativ ist, gibt es hingegen noch eine andere Option: Das Potenzial angeben. Das ist im Allgemeinen schwierig (System von partiellen Differentialgleichungen), aber hier kriegt man durch etwas Ausprobieren das Potenzial $f(x,y) = \log(\sqrt{x^2+y^2})$ heraus.

1.2.4 Das echte Gegenbeispiel

Im Wikipedia Artikel (oder Michaels Analysis II) zu konservativen Vektorfeldern findet sich das echte (beabsichtige) Gegenbeispiel:

$$v(x,y) := (\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{-x}{x^2+y^2}) \tag{11}$$

Dessen partielle Ableitungen erfüllen die gewünschte Gleichheit:

$$\partial_y v_1 = \frac{x^2+y^2-y2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \tag{12}$$

$$\partial_x v_2 = \frac{-(x^2+y^2)+x2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \tag{13}$$

Aber das Wegintegral um den Einheitskreis verschwindet nicht:

$$\begin{align}
\int_\gamma v ds &= \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} \sin(t) \\ -\cos(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix} \tag{14} \\
&= -\int_0^{2\pi} 1 dt \tag{15} \\
&= -2\pi \tag{16}
\end{align}$$