Anaylsis II

Mauro Bringolf

5.11.2018

1 Koordinatentransformation Beispiel 1D

Was bedeutet es einen Differentialoperator in anderen Koordinaten auszudrücken? Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Wir betrachten die Koordinatentransformation $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 2x$.

$$f(u) = f(u(x)) = f(2x) \Rightarrow \frac{d}{du} f(u) = 2 \frac{d}{dx} f(x) \tag{1}$$

Da die Funktion f komplett beliebig war handelt es sich um eine allgemeine Eigenschaft des Ableitungsoperators selber und man schreibt $du = 2 \cdot dx$.

2 Serie 5 Aufgabe I

Betrachten wir nun ein beliebiges $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ auf welches wir den Laplace Operator anwenden können. Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto f(u, v) = f(xy, x + y)$ die entsprechende Funktion in transformierten Variablen.

$$\partial_x g(x, y) = \partial_u f(u, v) \cdot \partial_x u(x, y) + \partial_v f(u, v) \cdot \partial_x v(x, y)$$

Mit der abkürzenden Schreibweise aus dem Skript und Musterlösung sieht das ungefähr so aus:

$$\partial_x = (\partial_x u) \cdot \partial_u + (\partial_x v) \cdot \partial_v$$

Da wir jetzt u und v konkret gegeben haben, können wir deren Ableitungen einsetzen und erhalten:

$$\partial_x = y \cdot \partial_u + \partial_v$$

Um die zweite Ableitung nach x zu erhalten, gibt es verschiedene Wege (insbesondere Notationen). Einer wäre folgendendermassen:

$$\begin{aligned}\partial_x^2 &= \partial_x\partial_x = (y \cdot \partial_u + \partial_v)(y \cdot \partial_u + \partial_v) \\ &= (y \cdot \partial_u + \partial_v)(y \cdot \partial_u) + (y \cdot \partial_u + \partial_v)\partial_v \\ &= y \cdot (\partial_u)(y \cdot \partial_u)) + \partial_v(y \cdot \partial_u) + y \cdot (\partial_u\partial_v) + \partial_v\partial_v\end{aligned}$$

Hier sind Multiplikationen wieder explizit ausgeschrieben um sie ganz klar von Funktionsanwendungen zu unterscheiden. Um weiterzurechnen muss man bei den Produkten mit y die Produktregel anwenden und insbesondere die Ableitungen nach u und v von y berechnen. Es ist etwas viel aufzuschreiben, aber funktioniert einwandfrei.

Die Musterlösung geht einen anderen Weg und verwendet einen praktische Abkürzung. Die entscheidende Beobachtung ist $\partial_x y = 0$ womit man erhält:

$$\begin{aligned}\partial_x^2 &= \partial_x\partial_x \\ &= \partial_x(y \cdot \partial_u + \partial_v) \\ &= (\partial_x y) \cdot \partial_u + y \cdot \partial_x\partial_u + \partial_x\partial_v \\ &= y \cdot \partial_x\partial_u + \partial_x\partial_v \\ &= y \cdot ((y \cdot \partial_u + \partial_v)\partial_u) + (y \cdot \partial_u + \partial_v)\partial_v \\ &= y^2 \cdot \partial_u^2 + y \cdot (\partial_v\partial_u) + y \cdot \partial_u + \partial_v + \partial_v\partial_v \\ &= y^2 \cdot \partial_u^2 + 2y \cdot \partial_{uv}^2 + \partial_v^2\end{aligned}$$

Nun haben wir einen Ausdruck in u und v für die zweite Ableitung nach x. Für die zweite Ableitung nach y können wir exakt denselben Weg gehen. Der Weg ist sogar so ähnlich, dass man auch bemerken kann dass u und v in x und y symmetrisch sind. Das heisst wir können einfach x und y vertauschen und dann gibt uns die Rechnung oben:

$$\partial_y^2 = x^2 \cdot \partial_u^2 + 2x \cdot \partial_{uv} + \partial_v^2$$

Das ist alles was wir brauchen, jetzt kann man das Resultat noch etwas vereinfachen und alle x und y als u und v ausdrücken:

$$\begin{aligned}\Delta &= \partial_x^2 + \partial_y^2 \\ &= (x^2 + y^2)\partial_u^2 + 2(x + y)\partial_{uv} + 2\partial_v^2 \\ &= (v^2 - 2u)\partial_u^2 + 2v\partial_{uv} + 2\partial_v^2\end{aligned}$$

3 Nachbesprechung Serie 6

3.1 Aufgabe I.2

Für diese Aufgabe braucht man zwei Dinge. Erstens schreibt man den Term um zu einem der einfacher abzuleiten ist:

$$\frac{1}{1-xy} = \sum_{k=0}^{\infty} (xy)^k \tag{2}$$

Dies ist eine geometrische Reihe, welche anwendbar ist da wir in der Nähe von $(0,0)$ garantieren können dass $|xy| < 1$. Der zweite Schritt ist die Definition des Taylorpolynoms für dieses konkrete Beispiel anzuschauen (2 Variablen, n-te Ordnung):

$$\begin{aligned} T_n f((x,y);(0,0)) &= \sum_{i=0}^{n} \sum_{m=0}^{i} \frac{1}{m!(i-m)!} \left(\partial_x^m \partial_y^{(i-m)} \sum_{k=0}^{\infty} (xy)^k \right) \Big|_{(0,0)} x^m y^{i-m} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{n} \sum_{m=0}^{i} \frac{1}{m!(i-m)!} \left(\partial_x^m \partial_y^{(i-m)} (xy)^k \right) \Big|_{(0,0)} x^m y^{i-m} \end{aligned}$$

Jetzt müssen wir also die Ableitungen von $(xy)^k$ anschauen. Diese sehen *ungefähr* so aus:

$$\partial_x^p \partial_y^q (xy)^k = \frac{k!}{(k-p)!} x^p \frac{k!}{(k-q)!} y^q \tag{3}$$

Warum *ungefähr*? Wenn wir öfters ableiten als es Potenzen gibt ($p > k$ oder $q > k$) dann kriegen 0 und die obere Formel stimmt nicht. Nun interessieren uns die Ableitungen spezifisch an der Stelle $(0,0)$, darum sehen wir auch dass alle Terme die noch x oder y Potenzen übrig haben direkt 0 ergeben. Zusammengefasst sind die einzigen nicht-Null Terme sind also solche wo beide Ableitungen genau mit der Potenz übereinstimmen.

In unserer Summe von oben bedeutet dass $k = m = i - m \Rightarrow i = 2m = 2k$ und alle anderen Terme sind 0. Wir können also die zwei inneren Summen weglassen und für m und $i - m$ einfach k einsetzen. Wenn wir das tun, müssen wir allerdings auch die Grenzen der äusseren Summe anpassen.

$$
\begin{aligned}
T_n f((x,y);(0,0)) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{n} \sum_{m=0}^{i} \frac{1}{m!(i-m)!} \left(\partial_x^m \partial_y^{(i-m)} (xy)^k \right) \Big|_{(0,0)} x^m y^{i-m} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{\frac{i}{2}!\frac{i}{2}!} \left(\partial_x^{\frac{i}{2}} \partial_y^{\frac{i}{2}} (xy)^k \right) \Big|_{(0,0)} x^{\frac{i}{2}} y^{\frac{i}{2}} \\
&\overset{*}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!k!} \left(\partial_x^k \partial_y^k (xy)^k \right) \Big|_{(0,0)} x^k y^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!k!} \left(\partial_x^k x^k k! \right) \Big|_{(0,0)} x^k y^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!k!} \left(k!k! \right) \Big|_{(0,0)} x^k y^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} x^k y^k
\end{aligned}
$$

Bei (*) muss man aufpassen mit der oberen Grenze für k. Dieses Mass an Genauigkeit ist natürlich nicht notwendig beim Lösen der Aufgabe, hier sind viele kleine Schritte zur Klarheit getrennt.

4 Lagrange-Multiplikatoren [FS17- A3]

Letzte Woche haben wir Extremalwerte von Skalarfeldern berechnet. Oft ist man allerdings an Maxima oder Minima interessiert die zusätzliche Bedingungen (Gleichungen) erfüllen. Dazu verwendet man die Methode der Lagrange-Multiplikatoren (Skript, Prop 3.9.2).

FS17 Aufgabe 3 Finde alle Extremalwerte von $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto xy$ unter der Nebenbedingung $0 = x^2 + y^2 - 1 =: g(x,y)$. Eine Extremstelle von f auf $g(x,y) = 0$ ist entweder ein kritischer Punkt von $g(x,y)$ oder von $L(x,y,\lambda) := f(x,y) - \lambda g(x,y)$. Der erste Fall ergibt $0 = \nabla f(x,y) = (2x, 2y)$ nur $(0,0)$ als kritischen Punkt. Dieser liegt aber definitv ausserhalb des Bereiches $x^2 + y^2 = 1$, das heisst es gibt nur Extremstellen die die zweite Bedingung erfüllen. Wir rechnen:

$$L(x,y,\lambda) = xy - \lambda(x^2 - y^2 + 1) \Rightarrow \nabla L(x,y,\lambda) = (y - 2\lambda x, x - 2\lambda y, -x^2 - y^2 + 1)$$

Auflösen dieses Gleichungssystems nach x und y liefert $(x,y) = (\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}})$. Der Satz über Lagrange-Multiplikatoren sagt uns, dass dies alles Minima oder

Maxima von f auf $g(x, y) = 0$ sind. Um zu entscheiden welche Art die einzelnen Punkte sind können wir einfach deren Funktionswerte berechnen und vergleichen.